10 Äquivalenzprinzip

Die physikalische Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) ist das von Einstein postulierte Äquivalenzprinzip[1]*. Dieses Prinzip besagt, dass Gravitationskräfte äquivalent zu Trägheitskräften sind.*

Wir werden folgende Feststellungen erläutern und begründen:

1. Schwere und träge Masse sind gleich.

2. Gravitationskräfte sind äquivalent zu Trägheitskräften.

3. Im Lokalen Inertialsystem (Satellitenlabor) gelten die bekannten Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie (SRT) *ohne* Gravitation.

Punkt 1 gibt die experimentelle Voraussetzung des Äquivalenzprinzips an. Punkt 2 ist die zentrale physikalische Aussage des Äquivalenzprinzips. Punkt 3 ist eine Formulierung des Äquivalenzprinzips, die wir für das weitere Vorgehen (Aufstellung von relativistischen Gesetzen mit Gravitation) benötigen.

Die *träge Masse* m_{t} ist die Masse im zweiten Newtonschen Axiom, also m auf der linken Seite von (1.4). Die Gravitationskräfte sind proportional zur *schweren Masse* m_{s}; dies ist m auf der rechten Seite von (1.4). Für die vertikale Bewegung in einem homogenen Schwerefeld wird (1.4) damit zu $m_{\mathrm{t}}\,\ddot{z} = -m_{\mathrm{s}}\,g$. Die Lösung dieser Differenzialgleichung,

$$z(t) = -\frac{1}{2}\,\frac{m_{\mathrm{s}}}{m_{\mathrm{t}}}\,g\,t^2 \tag{10.1}$$

beschreibt den freien Fall. Galileis Aussage „Alle Körper fallen gleich schnell“ bedeutet, dass das Verhältnis $m_{\mathrm{s}}/m_{\mathrm{t}}$ für alle Körper gleich ist. Anstelle des freien Falls kann man die Schwingungsperiode T eines Pendels (Länge ℓ) betrachten; für kleine Auslenkungen gilt $(T/2\pi)^2 = (m_{\mathrm{t}}/m_{\mathrm{s}})\,(\ell/g)$. Newton zeigte experimentell mit einer Genauigkeit von 10^{-3}, dass verschiedene Körper die gleiche Schwingungsdauer T ergeben. Eötvös baute 1890 ein anderes Experiment (Torsionswaage) auf, mit dessen verbesserter Version 1922 schließlich Genauigkeiten von $5\cdot 10^{-9}$ erreicht wurden. Neuere Experimente [9] erreichen Genauigkeiten von bis zu $4\cdot 10^{-13}$.

[1] Wir verwenden den Begriff „Äquivalenzprinzip“ immer in diesem Sinn. Abweichend hiervon könnte dieser Begriff auch für die Äquivalenz von Masse und Energie verwendet werden.

Sofern träge und schwere Masse zueinander proportional sind, können sie durch geeignete Wahl der Einheiten gleichgesetzt werden, also $m_\mathrm{t} = m_\mathrm{s}$. Für die in (1.2) angegebene Gravitationskonstante wurden $m_\mathrm{s} = m_\mathrm{t}$ und $[m_\mathrm{s}] = [m_\mathrm{t}] = \mathrm{kg}$ vorausgesetzt.

Wegen der Äquivalenz von Energie und Masse (Kapitel 4) tragen alle Energieformen zur Masse bei. Die Feststellung $m_\mathrm{s} = m_\mathrm{t}$ impliziert, dass jede Energieform ΔE (etwa der Beitrag der elektromagnetischen oder der starken Wechselwirkung) mit $\Delta E/c^2$ zur trägen und zur schweren Masse beiträgt. In den gerade erwähnten Experimenten spielt allerdings die gravitative Bindungsenergie keine Rolle. In Kapitel 31 kommen wir auf die Frage zurück, ob auch der Energiebeitrag der Gravitationswechselwirkung selbst (der für planetare Körper eine Rolle spielt) dem Äquivalenzprinzip genügt.

Sofern schwere und träge Masse gleich sind, sind Gravitationskräfte äquivalent zu Trägheitskräften. Dies bedeutet, dass Schwerefelder durch einen Übergang in ein beschleunigtes Koordinatensystem (KS) eliminiert werden können. Wir demonstrieren dies an einem einfachen Beispiel. Im homogenen Schwerefeld an der Erdoberfläche lautet Newtons Bewegungsgleichung für einen Massenpunkt

$$m_\mathrm{t}\,\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = m_\mathrm{s}\,\boldsymbol{g} \tag{10.2}$$

Dabei ist $\boldsymbol{g}$ die konstante Erdbeschleunigung. Diese Bewegungsgleichung gilt in einem auf der Erdoberfläche ruhenden System; für den jetzigen Zweck ist dies in hinreichend guter Näherung ein Inertialsystem (IS). Wir betrachten nun folgende Transformation zu einem beschleunigten KS,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{g}\,t'^2, \qquad t = t' \tag{10.3}$$

Der Ursprung $\boldsymbol{r}' = 0$ von KS bewegt sich im IS mit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{g}\,t^2/2$. Das Bezugssystem KS kann durch einen „frei fallenden Fahrstuhl“ realisiert werden. Wir setzen die Transformation (10.3) in (10.2) ein und erhalten

$$m_\mathrm{t}\,\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2} = \big(m_\mathrm{s} - m_\mathrm{t}\big)\,\boldsymbol{g} = 0 \tag{10.4}$$

Falls $m_\mathrm{s} = m_\mathrm{t}$ gilt, ist die resultierende Bewegungsgleichung in KS die eines freien Teilchens. Die Gleichheit von träger und schwerer Masse ermöglicht also ein KS, in dem die Gravitationskräfte wegfallen. Im Bezugssystem „frei fallender Fahrstuhl“ spürt der Benutzer keine Schwerkraft.

Einstein geht von einer Verallgemeinerung dieses Befundes aus. Sein Postulat lautet: In einem frei fallenden KS laufen *alle* Vorgänge so ab, als ob kein Gravitationsfeld vorhanden sei. Damit wird zum einen der Befund von mechanischen auf *alle* physikalischen Prozesse (zu allen Zeiten, an allen Orten) ausgedehnt. Außerdem werden inhomogene Gravitationsfelder zugelassen.

Das so verallgemeinerte Äquivalenzprinzip nennen wir *Einsteinsches Äquivalenzprinzip* oder auch *starkes* Äquivalenzprinzip. Die oben diskutierte Gleichheit

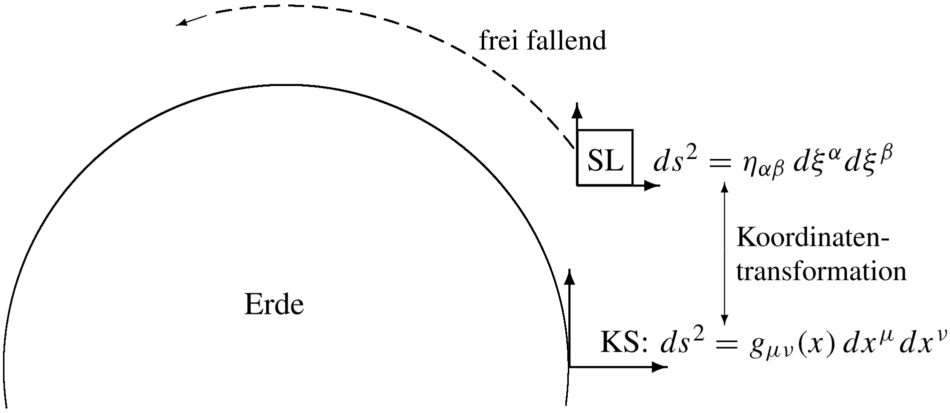

Abbildung 10.1 Nach dem Äquivalenzprinzip gelten im Satellitenlabor SL die Gesetze der SRT ohne Gravitation. Man erhält daraus die relativistischen Gesetze mit Gravitation in einem anderen Bezugssystem KS (etwa einem Labor auf der Erde), indem man eine allgemeine Koordinatentransformation einsetzt.

von träger und schwerer Masse wird dagegen *schwaches* Äquivalenzprinzip genannt. Es ist Gegenstand der wissenschaftlichen Diskussion, ob in einer konsistenten relativistischen Theorie der Gravitation das Einsteinsche Äquivalenzprinzip aus dem schwachen Äquivalenzprinzip abgeleitet werden kann. Im Folgenden verstehen wir unter Äquivalenzprinzip immer Einsteins Äquivalenzprinzip.

Ein mögliches frei fallendes System ist ein die Erde umkreisendes Satellitenlabor SL (ohne Eigenrotation). Ist das SL hinreichend klein, so können wir in ihm die Inhomogenität des Gravitationsfelds vernachlässigen. Fernsehaufnahmen aus Satellitenlabors demonstrieren anschaulich, dass hier mechanische Vorgänge so ablaufen, als sei kein Gravitationsfeld vorhanden. So bewegen sich freie Körper in SL geradlinig. Das Äquivalenzprinzip postuliert verallgemeinernd: In SL laufen *alle* Vorgänge so ab, als sei kein Gravitationsfeld vorhanden.

Die geradlinige Bewegung freier Massenpunkte in SL bedeutet, dass dort die Vorgänge so *wie in einem IS* ablaufen. Daher bezeichnen wir dieses lokale Bezugssystem, in dem sich keine Gravitationskräfte bemerkbar machen, als *Lokales IS*. Die Großschreibung von *Lokal* betont: *Das Lokale IS ist kein IS*. Ein Satellitenlabor ist ja gegenüber dem Fixsternhimmel *beschleunigt*. Nach der Einführung des Begriffs ‘Lokales IS’ lautet das Äquivalenzprinzip:

ÄQUIVALENZPRINZIP:
Im Lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der SRT.

Der Beobachter in SL stellt fest, dass physikalische Vorgänge nach den SRT-Gesetzen ablaufen; dabei treten keine Gravitationskräfte auf. Ein Beobachter auf der Erde sieht die Vorgänge im SL dagegen anders: Für ihn bewegt sich das SL im Gravitationsfeld. Dieses Feld ist etwa in 200 km Höhe nur geringfügig schwächer als auf der Erdoberfläche. Zusätzlich treten im SL Trägheitskräfte auf, weil das

SL beschleunigt ist. Die Bewegung des SL (freier Fall) ist gerade so, dass sich die Trägheitskräfte und die Gravitationskräfte aufheben (wie auf der rechten Seite von (10.4)).

Die Aufhebung von Beschleunigungs- und Gravitationskräften gilt exakt nur für den Schwerpunkt des SL. Das Äquivalenzprinzip bezieht sich daher auf ein *kleines* SL oder eben ein *Lokales* IS. Das Satellitenlabor oder der frei fallende Fahrstuhl sind geeignete Lokale IS für das Feld der Erde, da ihre Ausdehnung klein ist gegenüber der Länge (Erdradius), auf der sich das Feld wesentlich ändert. Betrachtet man das mittlere Gravitationsfeld des Weltalls (etwa gemittelt über viele Galaxienabstände), so kann hierfür ein Lokales IS auch eine entsprechend große Ausdehnung (zum Beispiel 10^5 Lichtjahre) haben.

Das Äquivalenzprinzip erlaubt die Aufstellung von *relativistischen Gesetzen mit Gravitation*. Dazu geht man von den bekannten SRT-Gesetzen aus, die die Vorgänge in SL korrekt beschreiben. Hierin setzt man eine Koordinatentransformation zu einem anderen Bezugssystem KS ein, etwa einem Labor auf der Erde (Abbildung 10.1). Man geht also nach folgendem Schema vor:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{SRT-Gesetz}\\ \text{ohne Gravitation}\end{array}} \xrightarrow[\text{transformation}]{\text{Koordinaten-}} \boxed{\begin{array}{l}\text{Relativistisches Gesetz}\\ \text{mit Gravitation}\end{array}}$$

In der Koordinatentransformation ist die relative Beschleunigung zwischen SL und KS enthalten, die dem Gravitationsfeld entspricht. Die Transformation hinterlässt „Spuren“ in dem betrachteten Gesetz. Diese Spuren geben die mathematische Form an, durch die das Gravitationsfeld beschrieben werden kann. Als nichtrelativistisches Beispiel betrachte man hierzu noch einmal (10.2) – (10.4) mit $m_{\mathrm{t}} = m_{\mathrm{s}} = m$. Gleichung (10.4) beschreibt die geradlinige Bewegung im frei fallenden Fahrstuhl (Gesetz ohne Gravitation). Die Transformation (10.3) führt zu (10.2). Als Spur dieser Transformation ergibt sich die Kraft $m\boldsymbol{g}$ in (10.2). Im Gegensatz zu diesem einfachen Beispiel ist die Elimination des Gravitationsfelds durch eine Koordinatentransformation im realen Fall (nichthomogenes Feld) aber nur *lokal* möglich.

Riemannscher Raum

Wir bezeichnen die Minkowskikoordinaten im Lokalen IS oder im SL mit ξ^α. Nach dem Äquivalenzprinzip gelten hier die Gesetze der SRT, insbesondere

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta \qquad \text{(Lokales IS, Minkowskiraum)} \tag{10.5}$$

Der Übergang vom Lokalen IS zu einem KS mit den Koordinaten x^μ erfolgt durch eine Koordinatentransformation,

$$\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{10.6}$$

Wir setzen diese Transformation in (10.5) ein und erhalten

$$\boxed{ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu\, dx^\nu \qquad \text{(KS, Riemannscher Raum)}} \tag{10.7}$$

mit dem metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\alpha\beta}\,\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \tag{10.8}$$

Die Rechnung verläuft wie in (9.3) – (9.5). Ein Raum mit einem Wegelement der Form (10.7) heißt *Riemannscher Raum*. Als Konvention verwenden wir die Indizes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ im Minkowskiraum und $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ im Riemannschen Raum. In beiden Fällen laufen die Indizes über die Werte 0, 1, 2 und 3.

Die $g_{\mu\nu}$ sind durch die Koordinatentransformation (10.6) bestimmt. Diese Transformation hängt von der relativen Beschleunigung zwischen dem KS und dem Lokalen IS ab. Für die Lokalen IS an zwei verschiedenen Orte sind diese Beschleunigungen unterschiedlich. Daher gilt:

- Für reale Gravitationsfelder gibt es keine *globale* Transformation, die (10.7) auf die Minkowskiform (10.5) bringt.

In Kapitel 18 werden wir zeigen, dass diese Aussage gleichbedeutend mit einer *Krümmung* des durch (10.7) beschriebenen Raums ist. Umgekehrt gilt, dass der Raum eben ist, wenn es eine solche globale Transformation gibt (dies ist zum Beispiel für das rotierende System mit dem Wegelement (9.2) der Fall).

Nach dem Äquivalenzprinzip können die Gravitationsfelder lokal vollständig (das heißt für alle physikalischen Effekte) eliminiert werden. Dies bedeutet zugleich, dass sie vollständig beschrieben werden durch die allgemeinen Koordinatentransformationen, die am jeweils betrachteten Punkt zum Lokalen IS führen. In der zentralen Größe des Wegelements führen diese Transformationen zum metrischen Tensor. Dieser enthält dann die relativistische Beschreibung des Gravitationsfelds.

Wie wir in Kapitel 11 sehen werden, bestimmen die Ableitungen der $g_{\mu\nu}$ die Gravitationskräfte in der relativistischen Bewegungsgleichung. Die $g_{\mu\nu}$ sind daher die *relativistischen Gravitationspotenziale*. Insbesondere gilt (9.7),

$$g_{00}(x) = 1 + \frac{2\,\Phi(x)}{c^2} \qquad \left(|\Phi| \ll c^2\right) \tag{10.9}$$

auch für das Newtonsche Gravitationspotenzial Φ.

Aus dem Äquivalenzprinzip folgen die relativistischen Gesetze im Gravitationsfeld. Das Äquivalenzprinzip kann aber nicht die Feldgleichungen für die $g_{\mu\nu}(x)$ festlegen; denn diese Gleichungen haben keine Entsprechung in der SRT. Die Feldgleichungen beschreiben den Zusammenhang zwischen den Gravitationsfeldern $g_{\mu\nu}(x)$ und ihren Quellen.