

31 Ideales Bosegas

Wir untersuchen das ideale Bosegas mit fester Teilchenzahl. Das ideale Bosegas ist ein bemerkenswertes Modell, weil es zu einem exakt berechenbaren Phasenübergang führt, der so genannten Bose-Einstein-Kondensation. Die enge Beziehung dieses Phasenübergangs zum λ -Übergang in der realen ^4He -Flüssigkeit wird in Kapitel 38 erörtert.

Wir gehen von nichtrelativistischen Bosonen mit dem Spin 0 und der Masse m aus. Die Einteilchenzustände mit dem Impuls $\mathbf{p}$ haben die Energie

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m} \quad (31.1)$$

Nach (29.39) ist die mittlere Anzahl von Bosonen in einem Einteilchenzustand

$$\overline{n_p} = \frac{1}{\exp [\beta (\varepsilon_p - \mu)] - 1} \quad (31.2)$$

Die thermodynamische Energie und Teilchenzahl sind durch

$$E(T, V, \mu) = \sum_p \varepsilon_p \overline{n_p}, \quad N(T, V, \mu) = \sum_p \overline{n_p} \quad (31.3)$$

gegeben. Nach (30.8) kann die Summe über die diskreten Impulse als Integral ausgeführt werden:

$$\sum_p \dots = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \dots \quad (31.4)$$

Durch (31.1) – (31.4) ist das *ideale Bosegas* definiert. Aus (31.3) erhalten wir durch Elimination von μ die Energie $E(T, V, N)$. Aus $E(T, V, N)$ folgen dann die spezifische Wärme c_V und der Druck (29.44), und damit auch alle anderen thermodynamischen Größen.

Für die mittlere Besetzungszahl (31.2) gilt

$$\overline{n_p} \xrightarrow{\varepsilon_p - \mu \rightarrow 0} \infty \quad (31.5)$$

Für positives μ wäre die mittlere Besetzungszahl also bei $\varepsilon_p = \mu$ singulär, $\overline{n_p} \propto 1/(\varepsilon_p - \mu)$. Dann würde das Integral (31.4) über $\overline{n_p}$ divergieren. Daher muss

$$\mu \leq 0 \quad (31.6)$$

gelten und damit $\varepsilon_p - \mu \geq 0$. Für $\varepsilon_p - \mu > 0$ können wir $\overline{n_p}$ nach Potenzen von $\exp(-\beta(\varepsilon_p - \mu)) < 1$ entwickeln:

$$\begin{aligned} N &= \sum_p \overline{n_p} = \sum_p \frac{\exp(-\beta(\varepsilon_p - \mu))}{1 - \exp(-\beta(\varepsilon_p - \mu))} = \sum_p \sum_{l=1}^{\infty} \left(\exp[-\beta(\varepsilon_p - \mu)] \right)^l \\ &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{l=1}^{\infty} \exp(\beta\mu l) \int d^3p \exp\left(-\frac{p^2 l}{2mk_B T}\right) \end{aligned} \quad (31.7)$$

Für $l = 1$ ist das Integral bereits aus (24.19) und (24.20) bekannt,

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) = \frac{1}{\lambda^3} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi mk_B T}} \quad (31.8)$$

Im Integral in (31.7) substituieren wir $p^2 l \rightarrow p'^2$ und $d^3p \rightarrow d^3p'/l^{3/2}$. Verglichen mit (31.8) ergibt sich ein zusätzlicher Faktor $1/l^{3/2}$, also

$$N(T, V, \mu) = \frac{V}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp(\beta\mu l)}{l^{3/2}} = \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \quad (31.9)$$

Im letzten Schritt haben wir die verallgemeinerte Riemannsche Zetafunktion

$$g_v(z) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^l}{l^v} \quad (31.10)$$

mit dem Argument

$$z = \exp(\beta\mu) \quad (31.11)$$

eingeführt. Bei gegebenem $v = V/N$ und T bestimmt (31.9) das chemische Potenzial $\mu = \mu(T, v)$. Zur Temperaturabhängigkeit von $\mu(T, v)$ (Abbildung 31.1) stellen wir fest: Für $T \rightarrow \infty$ gilt $\lambda^3 \rightarrow 0$, daher muss $g_{3/2}(z)$ in (31.9) gegen null gehen, und damit $z \rightarrow 0$ und $\mu \rightarrow -\infty$. Bei abnehmender Temperatur wächst λ^3 , und damit auch $g_{3/2}(z)$ in (31.9). Da $g_{3/2}(z)$ eine monotone Funktion von z ist, muss z dann größer werden. Nach (31.6) gilt $\mu \leq 0$, und damit $z \leq 1$. Die Lösung für den maximalen Wert $\mu = 0$ oder $z = 1$ kennzeichnen wir mit einem Index c:

$$\frac{\lambda_c^3}{v} = g_{3/2}(1) = \zeta(3/2) \quad (31.12)$$

Die verallgemeinerte Riemannsche Zetafunktion $g_v(z)$ reduziert sich dabei zur Riemannschen Zetafunktion $\zeta(v)$:

$$g_v(1) = \zeta(v) \equiv \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^v} \approx \begin{cases} \infty & (v = 1/2) \\ 2.6124 & (v = 3/2) \\ 1.3415 & (v = 5/2) \end{cases} \quad (31.13)$$

Wir haben hier die später benötigten numerischen Werte angegeben. Aus (31.12) folgt die zu $\mu = 0$ gehörige Temperatur T_c :

$$k_B T_c = \frac{2\pi}{[\zeta(3/2)]^{2/3}} \frac{\hbar^2}{m v^{2/3}} \quad \text{Übergangstemperatur} \quad (31.14)$$

Wie wir sehen werden, ist hierdurch die Übergangstemperatur T_c eines Phasenübergangs definiert. Für $T \sim T_c$ ist die quantenmechanische Wellenlänge eines thermisch bewegten Teilchens gleich dem mittleren Teilchenabstand. Für die Parameter von flüssigem ^4He erhalten wir

$$T_c = 3.13 \text{ K} \quad (^4\text{He}, v = 46 \text{ \AA}^3) \quad (31.15)$$

Bisher haben wir gesehen, dass μ von $-\infty$ bei $T \rightarrow \infty$ mit abnehmender Temperatur auf $\mu = 0$ für $T \rightarrow T_c$ wächst. Für $\mu > 0$ hat (31.9) keine Lösung. Hieraus folgt eine Einschränkung des Temperaturbereichs:

$$\mu \leq 0 \quad \xrightarrow{(31.9)} \quad \frac{\lambda^3}{v} \leq \zeta(3/2) \quad \text{oder} \quad T \geq T_c \quad (31.16)$$

Nun müssen sich die vorhandenen Teilchen aber auch für $T \leq T_c$ irgendwie über die zur Verfügung stehenden Niveaus verteilen. Das heißt, die Gleichung $N = \sum \bar{n}_p$ muss eine Lösung haben; aus ihr darf nicht, wie in (31.16), die Beschränkung $T \geq T_c$ folgen. Damit weist (31.16) auf einen Fehler in der Auswertung der Teilchenzahlbedingung (31.7) hin.

Bei vorgegebener Dichte N/V folgt aus Gleichung (31.9)

$$\mu \xrightarrow{T \rightarrow T_c^+} 0^- \quad (31.17)$$

Die Indizes $+$ und $-$ sollen anzeigen, von welcher Seite aus man sich dem Grenzwert nähert. Mit $\mu \rightarrow 0^-$ wird die mittlere Besetzungszahl des niedrigsten Niveaus mit $\varepsilon_0 = 0$ beliebig groß:

$$N_0 = \bar{n}_0 \xrightarrow{\mu \rightarrow 0^-} \infty \quad (31.18)$$

Im Folgenden bezeichnen wir die Anzahl der Teilchen im untersten Niveau mit N_0 . In Abbildung 31.2 sind die Besetzungszahlen für $T < T_c$ skizziert, wie sie sich aus (31.2) mit $\mu = 0$ und aus der folgenden Diskussion ergeben.

Der Beitrag der N_0 Teilchen ging beim Übergang von der Summe zum Integral in (31.7) verloren: Für $\mu = 0$ und $p \rightarrow 0$ ist $\bar{n}_p \propto 1/p^2$. Dies ergibt in der Integration $d^3p = 4\pi p^2 dp$ nur einen Beitrag proportional zu dp , also einen verschwindenden Beitrag in einer infinitesimalen Umgebung von $p = 0$. Da der Beitrag mit $\bar{n}_0$ nicht im Integral enthalten ist, muss er bei der Ersetzung $\sum_p \rightarrow \int d^3p$ gesondert berücksichtigt werden:

$$N = \bar{n}_0 + \sum_{p \neq 0} \bar{n}_p = \bar{n}_0 + \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \bar{n}_p = N_0 + \frac{V}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \quad (31.19)$$

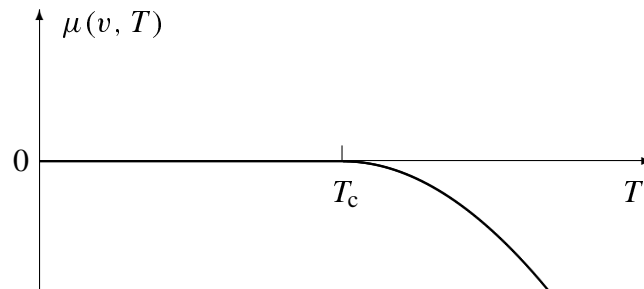


Abbildung 31.1 Chemisches Potenzial des idealen Bosegases als Funktion der Temperatur ($v = \text{const.}$).

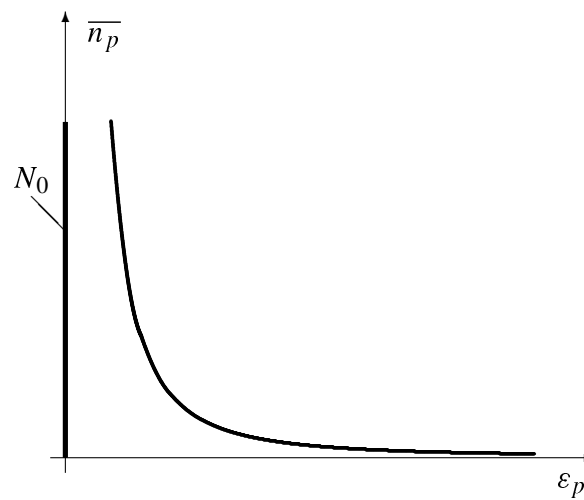


Abbildung 31.2 Besetzungszahlen des idealen Bosegases für $T < T_c$. Der dicke Balken soll die makroskopische Besetzung des untersten Einteilchenniveaus für $T < T_c$ darstellen, $N_0 = \overline{n}_0 = O(N)$.

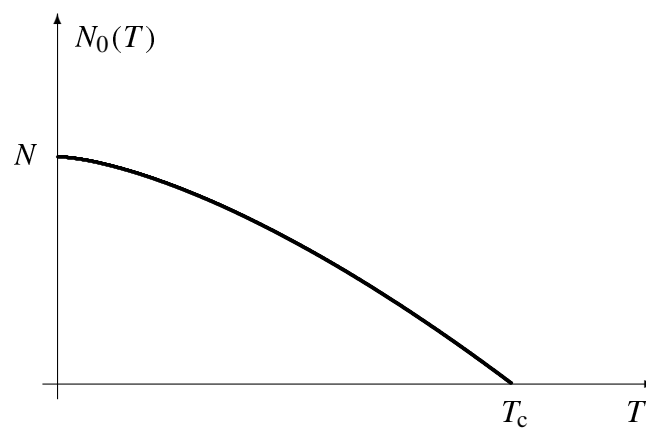


Abbildung 31.3 Anzahl N_0 der kondensierten Teilchen im idealen Bosegas als Funktion von T .

Für $T > T_c$ ist $\bar{n}_0 = \mathcal{O}(1)$ und kann weggelassen werden; damit bleibt (31.9) für $T > T_c$ gültig. Für $N_0 \gg 1$ folgt aus (31.2)

$$1 \ll N_0 = \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_0 - \mu)] - 1} \approx \frac{k_B T}{\varepsilon_0 - \mu} \stackrel{V \rightarrow \infty}{=} \frac{k_B T}{-\mu} \quad (31.20)$$

Wir untersuchen keine Effekte, die auf der endlichen Größe des Systems beruhen. Daher betrachten wir den Grenzfall

$$N \rightarrow \infty, \quad V \rightarrow \infty, \quad v = \frac{V}{N} = \text{const.} \quad (31.21)$$

In diesem Limes geht die Energie des untersten Einteilchenniveaus gegen null, $\varepsilon_0 \approx \hbar^2/(m V^{2/3}) \rightarrow 0$. Dies gilt auch für das chemische Potenzial unterhalb von T_c :

$$\mu = -\frac{k_B T}{N_0} = -\frac{k_B T}{\mathcal{O}(N)} \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} 0^- \quad (T \leq T_c, N \rightarrow \infty) \quad (31.22)$$

Der Grenzfall (31.21) wird *thermodynamischer Limes* genannt. Die Endlichkeit eines konkreten makroskopischen Systems spielt wegen der großen Teilchenzahl (etwa $N = 10^{24}$) im Allgemeinen keine Rolle. In der theoretischen Behandlung wird daher der thermodynamische Limes verwendet.

Wir setzen $\mu = 0$ in (31.19) ein:

$$N = N_0 + \frac{V}{\lambda^3} \zeta(3/2) \quad (T \leq T_c) \quad (31.23)$$

Für den zweiten Term schreiben wir

$$\frac{V}{\lambda^3} \zeta(3/2) = \frac{\lambda_c^3}{\lambda^3} \frac{V}{\lambda_c^3} \zeta(3/2) = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \frac{V}{\lambda_c^3} \zeta(3/2) \stackrel{(31.12)}{=} N \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} \quad (31.24)$$

Damit liegt die Temperaturabhängigkeit von $N_0(T)$ fest:

$$\frac{N_0}{N} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} & (T \leq T_c) \\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right) \approx 0 & (T > T_c) \end{cases} \quad (31.25)$$

Dieses Ergebnis ist in Abbildung 31.3 skizziert. Für $T < T_c$ geht ein endlicher Bruchteil N_0/N aller Atome in den tiefsten Zustand. Man spricht auch von kondensierten Teilchen. Für $T = 0$ erhalten wir $N_0 = N$, also den quantenmechanisch zu erwartenden Grundzustand.

Die Tatsache, dass sich im idealen Bosegas eine diskrete Übergangstemperatur T_c ergibt und dass für $T \leq T_c$ ein endlicher Bruchteil aller Teilchen in den tiefsten Zustand geht, wird als *Bose-Einstein-Kondensation* bezeichnet. Dieser Effekt wurde 1924 von Einstein gefunden, der das ideale Gas mit der von Bose eingeführten

Statistik untersuchte. Die Bezeichnung als Kondensation rührt daher, dass ebenso wie beim Übergang gasförmig-flüssig die kondensierten Teilchen nicht mehr zum Gasdruck beitragen.

Das ideale Bosegas hat damit einen Phasenübergang; das heißt bei einer bestimmten Temperatur T_c ändert sich das Verhalten des Systems qualitativ. Wir werden Phasenübergänge in Teil VI noch näher diskutieren und dabei auch auf die Bose-Einstein-Kondensation zurückkommen.

Wir berechnen die Energie des idealen Bosegases:

$$\begin{aligned} \sum_p \varepsilon_p \bar{n}_p &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{l=1}^{\infty} \exp(\beta\mu l) \int d^3p \frac{p^2}{2m} \exp\left(-\frac{p^2 l}{2mk_B T}\right) \\ &= \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{l=1}^{\infty} \exp(\beta\mu l) \left(-\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial l}\right) \int d^3p \exp\left(-\frac{p^2 l}{2mk_B T}\right) \end{aligned} \quad (31.26)$$

Wie in (31.7) ist das Integral inklusive des Vorfaktors $1/(2\pi\hbar)^3$ gleich $1/(\lambda^3 l^{3/2})$. Die Ableitung $\partial/\partial l$ ergibt dann $-(3/2)/(\lambda^3 l^{5/2})$, also

$$E(T, V, \mu) = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\exp(\beta\mu l)}{l^{5/2}} = \frac{3}{2} k_B T \frac{V}{\lambda^3} g_{5/2}(z) \quad (31.27)$$

Dies gilt auch für $T < T_c$, denn der Zusatzterm $N_0 \varepsilon_0$ vom niedrigsten Niveau verschwindet wegen $\varepsilon_0 = 0$.

Wir berechnen die spezifische Wärme c_V . Wir beginnen mit dem Fall $T \leq T_c$ (also $\mu = 0$ und $z = 1$) und erhalten hierfür

$$\frac{c_V(T)}{k_B} = \frac{1}{Nk_B} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1) = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \quad (T \leq T_c) \quad (31.28)$$

Bei der Differenziation ergab sich wegen $T/\lambda^3 \propto T^{5/2}$ ein Faktor $5/2$. Im letzten Schritt wurde (31.24) verwendet. Dieses Ergebnis ist so zu interpretieren, dass die $N(T/T_c)^{3/2}$ nichtkondensierten Teilchen einen Beitrag der Größe $\mathcal{O}(k_B)$ zur spezifischen Wärme liefern; die kondensierten Teilchen tragen dagegen nicht bei.

Wir betrachten nun den Fall $T \geq T_c$, in dem μ und z Funktionen von T und v sind. Aus (31.27) erhalten wir dann

$$\frac{c_V(T)}{k_B} = \frac{1}{Nk_B} \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{V,N} = \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) + \frac{3}{2} \frac{v}{\lambda^3} T g'_{5/2}(z) \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_v \quad (31.29)$$

Für $T > T_c$ folgt das chemische Potenzial aus der Teilchenzahlbedingung (31.9):

$$1 = \frac{v}{\lambda^3} g_{3/2}(z) \quad (T > T_c) \quad (31.30)$$

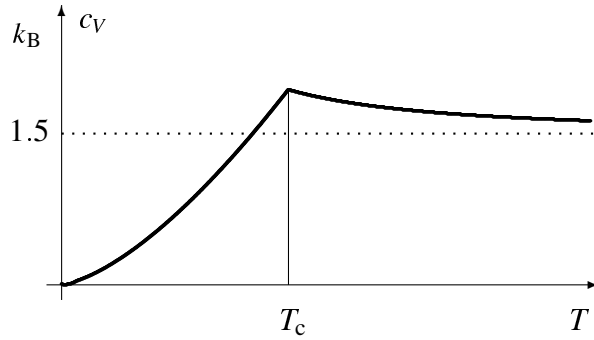


Abbildung 31.4 Spezifische Wärme des idealen Bosegases als Funktion der Temperatur.

Wir leiten dies nach der Temperatur ab (für $v = \text{const.}$) und kürzen den Faktor v/λ^3 :

$$0 = \frac{3}{2T} g_{3/2}(z) + g'_{3/2}(z) \left(\frac{\partial z}{\partial T} \right)_v \quad (31.31)$$

Hieraus bestimmen wir die partielle Ableitung $(\partial z / \partial T)_v$. Wir setzen diese Ableitung in (31.29) ein, wobei wir auch (31.30) verwenden:

$$\frac{c_V(T)}{k_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g'_{5/2}(z)}{g'_{3/2}(z)} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \quad (T \geq T_c) \quad (31.32)$$

Im letzten Schritt wurde $z g'_v(z) = g_{v-1}(z)$ benutzt; dies folgt sofort aus der Definition (31.10).

Für hohe Temperaturen ($\lambda^3/v \ll 1$) gilt $z = \exp(\beta\mu) \ll 1$. Mit der Näherung $g_v(z) \approx z + z^2/2^v$ berechnen wir (31.32) in erster Ordnung in z :

$$\frac{c_V(T)}{k_B} \approx \frac{3}{2} \left(1 + \frac{z}{2^{7/2}} \right) \approx \frac{3}{2} \left[1 + \frac{\zeta(3/2)}{2^{7/2}} \left(\frac{T_c}{T} \right)^{3/2} \right] \quad (T \gg T_c) \quad (31.33)$$

Der führende Beitrag $c_V(T) = 3k_B/2$ ist der klassische Grenzfall. Im Korrekturterm mit $z/2^{7/2}$ wurde (31.30) in der führenden Ordnung, $z \approx \lambda^3/v$, und (31.24) verwendet. Das Ergebnis (31.33) erhält man auch aus (30.17).

Aus (31.28) und (31.32) (man beachte $g_{1/2}(1) = \infty$) folgt derselbe Wert für $T = T_c$:

$$\frac{c_V(T)}{k_B} = \frac{15}{4} \frac{\zeta(5/2)}{\zeta(3/2)} \approx 1.925 \quad (T = T_c^\pm) \quad (31.34)$$

Ebenso wie $N_0(T)$ ist die spezifische Wärme $c_V(T)$ bei $T = T_c$ stetig, hat aber einen Knick. Die Näherung (31.33) ergibt $c_V(T_c) \approx 1.846 k_B$; sie ist damit auch über den Bereich $T \gg T_c$ hinaus brauchbar. Aus (31.28), (31.33) und (31.34) ergibt sich das in Abbildung 31.4 skizzierte Verhalten der spezifischen Wärme.

In (31.15) haben wir aus der Dichte von flüssigem ^4He eine Übergangstemperatur von 3.13 K erhalten. Tatsächlich zeigt nun flüssiges ^4He bei $T_c = 2.17$ K einen Phasenübergang, den so genannten λ -Übergang. Da flüssiges ^3He keinen solchen Übergang zeigt, muss dieser Übergang mit der Austauschsymmetrie verknüpft

sein; denn die Wechselwirkung zwischen den Atomen ist für ^4He und ^3He praktisch gleich. Da die Austauschsymmetrie und nicht die Wechselwirkung für den λ -Übergang entscheidend ist, ist es sinnvoll, als einfachstes Modell das ideale Bosegas für ^4He zu betrachten und die Bose-Einstein-Kondensation mit dem λ -Übergang zu vergleichen (Kapitel 38).

Zustandsgleichung

Aus (29.44) erhalten wir für die thermische Zustandsgleichung

$$P(T, V, N) = \frac{2}{3} \frac{E(T, V, N)}{V} \quad (31.35)$$

Die Energie $E(T, V, N)$ ergibt sich für $T > T_c$ aus $E(T, V, \mu)$ und $N(T, V, \mu)$, (31.19) und (31.27), durch Elimination von μ . Für $T < T_c$ genügt es, $\mu(T, v) = 0$ in $E(T, V, \mu)$ einzusetzen.

Wir diskutieren noch einige Besonderheiten der Zustandsgleichung für $T < T_c$. Zunächst wird (31.35) zu

$$P(T) = \frac{2}{3} \frac{E(T, V, \mu = 0)}{V} \stackrel{(31.27)}{=} \frac{k_B T}{\lambda^3} \xi(5/2) \quad (31.36)$$

Erstaunlicherweise hängt dieser Druck nicht vom Volumen V (oder von V/N) ab, sondern nur von der Temperatur. Wegen $(\partial P/\partial V)_T = 0$ setzt das System einer Volumenverringering keinen Widerstand entgegen. Vielmehr werden bei einer Volumenverringering einfach mehr Teilchen ins Kondensat gedrängt.

Im P - V -Diagramm bedeutet $(\partial P/\partial V)_T = 0$ eine horizontale Isotherme (für $T < T_c$). Dies kann mit der horizontalen Isothermen des van der Waals-Gases (Abbildung 37.2) verglichen werden. Entlang dieser Horizontalen erfolgt der Übergang zwischen zwei Phasen (flüssig zu gasförmig in Abbildung 37.2, kondensiert zu nichtkondensiert hier).

Für $T < T_c$ gilt $\mu(v, T) = 0$. Hieraus folgt aber nicht, dass auch $s = (\partial \mu/\partial T)_P$ verschwindet (was im Widerspruch zu (31.28) stünde). Um s so zu berechnen, müsste man erst $v(T, P)$ in $\mu(T, v)$ einsetzen. Dann scheitert das weitere Vorgehen: Zunächst gilt $(\partial \mu/\partial T)_P = (\partial \mu/\partial v)_T (\partial v/\partial T)_P + (\partial \mu/\partial T)_v$. Nun ist $(\partial v/\partial T)_P = (\partial P/\partial T)_v/(\partial P/\partial v)_T$ aber unendlich (wegen $(\partial P/\partial v)_T = 0$). Die thermodynamischen Beziehungen führen hier also zu einem unbestimmten Ausdruck (der Form null/null). Die Größe μ sollte daher bevorzugt als die Normierungskonstante in den Besetzungszahlen (31.2) angesehen werden.

Die Aussage $\partial P/\partial V = 0$ für $T < T_c$ ist in zweierlei Hinsicht zu modifizieren. Zum einen haben die kondensierten Teilchen in einem endlichen Volumen eine nichtverschwindende Nullpunktenergie. Damit ergeben auch sie einen endlichen Beitrag zur Energie und zum Druck. Dieser Beitrag verschwindet erst im thermodynamischen Limes (31.21); jedes reale System hat aber ein endliches Volumen. Zum anderen gibt es im realen System (etwa in flüssigem Helium, das in Kapitel 38 noch näher diskutiert wird) Wechselwirkungen, die dann einen endlichen Wert von $\partial P/\partial V = 0$ ergeben.

Ideales Bosegas in einem Oszillator

Wir übertragen einige Ergebnisse auf den Fall eines idealen Bosegases in einem Oszillatorpotenzial. Die Einteilchenenergien im sphärischen Oszillator sind $\varepsilon_{n_x n_y n_z} = \hbar\omega (n_x + n_y + n_z + 3/2)$. Die Teilchenzahlbedingung

$$N = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} \sum_{n_z=0}^{\infty} \frac{1}{\exp[\beta(\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu)] - 1} \quad (31.37)$$

legt das chemische Potenzial μ fest; der Summand ist die mittlere Besetzungszahl für das Oszillatorniveau mit den Quantenzahlen n_x, n_y und n_z . Das unterste Niveau hat die Energie $\varepsilon_{000} = 3\hbar\omega/2$ (anstelle von $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ für $V \rightarrow \infty$). Der Übergangspunkt, bei dem die makroskopische Besetzung des Grundzustands erfolgt, ergibt sich daher aus

$$\mu \rightarrow \mu_c = \frac{3}{2} \hbar\omega \quad (31.38)$$

Für $T \leq T_c$ gelten $\mu = \mu_c$ und $\varepsilon_{n_x n_y n_z} - \mu = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z)$. Wegen $k_B T \gg \hbar\omega$ kann die Summe in (31.37) als Integral ausgewertet werden. Dabei muss aber die Besetzungszahl N_0 des Oszillatorgrundzustands gesondert angeschrieben werden:

$$N = N_0 + \int_0^{\infty} dn_x \int_0^{\infty} dn_y \int_0^{\infty} dn_z \frac{1}{\exp[\beta\hbar\omega(n_x + n_y + n_z)] - 1} \quad (T \leq T_c) \quad (31.39)$$

Der Integrand lässt sich als geometrische Reihe $\sum_{l=1}^{\infty} \exp(-[...l])$ schreiben; die einzelnen Integrale können dann elementar ausgeführt werden. Dies ergibt

$$N = N_0 + \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 \quad (T \leq T_c) \quad (31.40)$$

wobei $\zeta(3) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-3} \approx 1.202$ ist. Die kritische Temperatur ergibt sich aus $N_0 \rightarrow 0$, also

$$k_B T_c = \hbar\omega \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \approx 0.94 \hbar\omega N^{1/3} \quad (31.41)$$

Damit wird (31.40) zu

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (T \leq T_c) \quad (31.42)$$

Dies ist mit (31.25) zu vergleichen. Das Kondensat besteht aus allen Atomen, die im Oszillatorgrundzustand sind.

Der thermodynamische Limes (31.21) verlangt eine endliche Dichte, $V/N = \text{const.}$ Das Volumen des jetzt betrachteten Systems ist proportional zu b^3 , wobei $b = \hbar/m\omega$ die Oszillatorlänge ist. Der thermodynamische Limes lautet daher

$$N \rightarrow \infty, \quad \hbar\omega \rightarrow 0, \quad N(\hbar\omega)^3 = \text{const.} \quad (31.43)$$

Damit ergibt (31.41) einen endlichen Wert für die Übergangstemperatur T_c .

Reales Bosegas in einer Atomfalle

Atome mit einer insgesamt geraden Anzahl von Fermionen, wie etwa ein Wasserstoffatom (1 Proton, 1 Elektron) oder ein Lithiumatom (7 Nukleonen, 3 Elektronen), haben ganzzahligen Spin und sind daher Bosonen. Wir betrachten speziell Atome mit einer ungeraden Zahl von Elektronen. Solche Atome haben ein magnetisches Moment von der Größe des Bohrschen Magnetons. Man kann nun einige 10^3 bis etwa 10^7 dieser Atome in einer magnetischen Falle zusammen halten und auf tiefe Temperaturen (unter 10^{-6} K) bringen. In einer solchen Anordnung wurde erstmals 1995 für ^{87}Rb - und ^{23}Na -Atome eine Bose-Einstein-Kondensation beobachtet.¹ Alternativ werden optische Atomfallen verwendet, in denen die Wechselwirkung über (durch Laserlicht) induzierte elektrische Dipolmoment der Atome verläuft.

Die Kräfte in einer Atomfalle lassen sich durch ein Oszillatorpotenzial annähern. Wenn wir die Wechselwirkungen zwischen den Atomen vernachlässigen, können wir die Ergebnisse des vorigen Abschnitts anwenden. Aus (31.41) erhalten wir

$$T_c \sim 3 \cdot 10^{-7} \text{ K} \quad (\text{für } \hbar\omega \approx 10^{-8} k_B \text{ K und } N = 4 \cdot 10^4) \quad (31.44)$$

als einen typischen Wert für die Übergangstemperatur. Wegen der endlichen Anzahl der Atome ist der thermodynamische Limes (31.43) nur näherungsweise zu erreichen. Dies führt dann dazu, dass der Übergang nicht völlig scharf ist; ein Knick wie der bei T_c in Abbildung 31.4 wird daher etwas ausgeschmiert.

Das Kondensat besteht aus den Atomen, die im Oszillatorgrundzustand sind. Im Impulsraum bildet das Kondensat einen überhöhten Anteil mit kleineren Impulsen (entsprechend dem Oszillatorgrundzustand), der sich neben der breiteren Impulsverteilung der anderen Teilchen deutlich abhebt. Schaltet man das Magnetfeld der Falle ab, dann laufen die Atome gemäß ihrer Anfangsimpulsverteilung frei auseinander; die Dichte dieser expandierenden Wolke aus Atomen kann durch Lichtabsorption bestimmt werden.

Im unendlichen System ist das Kondensat von den anderen Teilchen räumlich nicht zu trennen. Dies ist bei der Bose-Einstein-Kondensation in der Atomfalle anders: Die räumliche Dichteverteilung besteht aus einer breiten Verteilung und zusätzlich einer überhöhten, schmalen Gaußverteilung, die proportional zum Quadrat der Oszillatorgrundzustandswellenfunktion ist (und die Breite $b = \hbar/m\omega \sim 10^{-6}$ m hat). Diese Dichteverteilung kann durch Lichtstreuung gemessen werden. Durch solche Experimente wurde die Bose-Einstein-Kondensation sowohl im Orts- wie im Impulsraum nachgewiesen.

Die Dichte n des Gases in der magnetischen Falle ist sehr klein:

$$n |a|^3 < 10^{-3} \quad (31.45)$$

Hierbei ist a die Streulänge der s-Welle; es gilt $a = (m/4\pi\hbar^2) \int d^3r V(r)$ mit dem Atom-Atom-Potenzial $V(r)$. Unter den betrachteten Bedingungen (Tempera-

¹Für eine kurze Einführung in die Experimente sei auf W. Petrich, Physikalische Blätter 52 (1996) 345 verwiesen, für einen ausführlichen Überblick über die Theorie auf den E-Print *Theory of trapped Bose-condensed gases* von F. Dalfovo et al., cond-mat/9806038 im Archiv www.arxiv.org.

tur $T \lesssim T_c$ und Normaldruck) ist der thermodynamische Gleichgewichtszustand des Systems eigentlich ein fester Körper. Wegen (31.45) sind Kollisionen aber so selten, dass der (metastabile) Gaszustand hinreichend lange stabil ist.

Bisher haben wir die Atome in der Falle als ideales Gas behandelt. Die Vernachlässigung der Wechselwirkung zwischen den Atomen setzt voraus, dass ihr Energiebeitrag E_{int} klein gegenüber der kinetischen Energie E_{kin} ist. Für das Verhältnis dieser Energien erhält man

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} = \frac{N |a|}{b} \quad (31.46)$$

Dabei ist a die Streulänge und $b = \hbar/m\omega$ die Oszillatorlänge. Das Verhältnis (31.46) kann viel größer als 1 sein, auch wenn das Gas sehr verdünnt (31.45) ist. Dies führt zu Abweichungen vom idealen Verhalten; die Übergangstemperatur bleibt aber etwa gleich.

Aufgaben

31.1 Spezifische Wärme des Bosegases für hohe Temperaturen

Für die spezifische Wärme des idealen Bosegases erhält man

$$\frac{c_V(T)}{k_B} = \frac{15}{4} \frac{g_{5/2}(z)}{g_{3/2}(z)} - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)} \quad (T \geq T_c)$$

Hierbei ist $g_\nu(z)$ die verallgemeinerte Riemannsche Zetafunktion, $z = \exp(\beta\mu)$, und T_c ist die Übergangstemperatur. Bestimmen Sie die beiden führenden Terme der spezifischen Wärme für $T \gg T_c$.

31.2 Bosegas im Oszillator

Das Kondensat eines idealen Bosegases im harmonischen Oszillator besteht aus den N_0 Teilchen im Grundzustand. Wenn ein Kondensat vorliegt, dann lautet die Teilchenzahlbedingung

$$N = N_0 + \int_0^\infty dn_x \int_0^\infty dn_y \int_0^\infty dn_z \frac{1}{\exp[\beta \hbar \omega (n_x + n_y + n_z)] - 1} \quad (31.47)$$

Die Oszillatorenergien sind $\varepsilon = \hbar \omega (n_x + n_y + n_z + 3/2)$. In den Ausdruck für die mittleren Teilchenzahlen wurde $\mu = 3 \hbar \omega / 2$ eingesetzt; dies gilt, wenn ein endlicher Bruchteil aller Teilchen im Grundzustand ist.

Schreiben Sie den Integranden als geometrische Reihe $\sum_{l=1}^\infty \exp(-[...l])$ und führen Sie die Integration aus. Bestimmen Sie N_0 als Funktion der Temperatur.

31.3 Bosegas in zwei Dimensionen

Zeigen Sie, dass es in einem idealen Bosegas in zwei Dimensionen keine Bose-Einstein-Kondensation gibt. Werten Sie dazu den Zusammenhang zwischen der Teilchenzahl N und dem chemischen Potenzial μ aus und diskutieren Sie das Ergebnis für $\mu \rightarrow 0$.